

**СЕКЦІЯ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»**

УДК 532.135+612.11

DOI 10.31651/2076-5886-2019-2-4-10

PACS 47.50

**БАТЮК Лілія Василівна**

кандидат біологічних наук, доцент, доцент кафедри медичної і біологічної фізики та медичної інформатики, Харківський національний медичний університет  
e-mail: liliyabatyuk24@gmail.com  
ORCID 0000-0003-1863-0265

**КІЗІЛОВА Наталія Миколаївна**

доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет ім.В.Н. Каразіна  
e-mail: n.kizilova@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9981-7616

**ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕЧІЙ БІНГАМІВСЬКИХ НАНОРІДИН ПО МІКРОКАНАЛАХ**

*Розглядаються стаціонарні течії нанорідин, які являють собою концентровані суспензії наночастинок та широко використовуються в системах охолодження мікроприладів, в біомедичних системах та в багатьох інших. Рух нанорідини описується рівняннями Нав'є-Стокса з умовами прослизання другого порядку на шорстких поверхнях каналів, а їх реологія відповідає бінгамівським рідинам. Отримані розв'язки задачі у випадку течій по круговим трубкам, між паралельним пластинами та співвісними циліндрами. Обчислені в'язке тертя на стінках, об'ємна витрата рідини, обговорені відміни від випадку класичних бінгамівських рідин та можливість практичного застосування нових ефектів, зокрема для обробки мікрооб'ємів суспензії крові, яка є бінгамівською рідиною.*

**Ключові слова:** *нанофлюїдика, бінгамівська рідина, стаціонарні течії, шорсткі стінки.*

**Вступ**

Останнім часом велику увагу привертають новітні мікро- та нанотехнології, які дозволяють розробляти різні мікроскопічні пристрої для численних технічних, біомедичних та інформаційних технологій [1-3]. Велика роль в таких пристроях належить системам циркуляції рідин, які використовуються для постачання речовин, виносу продуктів хімічних реакцій, нагрівання або охолодження компонент пристроїв та ін. Особливо перспективними є мікро/нанорідини, які являють собою суспензії мікро або наночастинок з розмірами  $a \sim 10-500 \mu\text{m}$  та  $a \sim 10-500 \text{nm}$  [4]. Завдяки унікальним фізичним властивостям наночастинок отримувані з ними мікро/нанорідини є більш ефективними, ніж звичайні рідини, тому що мають значно вищі теплопровідності, теплоємності, електропровідності та інші властивості. Для розробки таких мікрорідинних систем потрібні детальні інженерні розрахунки параметрів течій та оптимізація дизайну пристроїв, для чого потрібна розробка відповідних математичних моделей та розв'язки задач оптимізації.

Численні експериментальні дослідження течій рідин в мікро/наноканалах показали, що навіть при ламінарних течіях по циліндричних трубках об'ємна витрата рідини є набагато більшою, ніж передбачувана за формулою Пуазейля [2]. Це означає,

що гідравлічний опір трубки є за яких-то причин значно меншим, ніж опір макроскопічних трубок. Так, при фільтрації води в фільтрах, утворених паралельними пучками вуглеводних нанотрубок, загальний опір був в 200 разів менший, ніж розрахований за формулою Пуазейля для сукупності трубок [5]. Оскільки на довжинах  $>10$  нм квантові ефекти ще не проявляються і рух рідини визначається рівняннями Нав'є-Стокса [2], було показано, що цей ефект пов'язаний з дифузійним відбиттям частинок мікро/нанорідин на шорстких стінках [1,2,6].

Характерний розмір мікро-, а особливо наночастинок, відповідає розміру неоднорідностей твердої стінки трубки або каналу, тому характерні для в'язких рідин умови прилипання до стінки не виконуються, а мають місце умови прослизання [6]. На шорстких поверхнях відбувається дифузійне відбиття частинок в напрямку руху рідини, що може розглядатися як тангенціальний переніс частинок вздовж стінки [1-3]. Якісною мірою цього процесу є коефіцієнт переносу імпульсу (tangential momentum accommodation factor  $\sigma$ ); для мікро/нанорідин  $\sigma = 1$ , а для звичайних рідин  $\sigma = 2$  [1-3].

Особливості руху неньютонівських рідин по мікро/нанотрубках та каналах з умовами прослизання на стінках раніше досліджувались, зокрема для в'язкопружних рідин Максвелла [7], Джефрі [8], Бонджерно [9], та ряду інших. В даній роботі досліджується вплив дифузійного віддзеркалення та просковзання на стінках мікроканалів на гідродинамічні параметри течії бінгамівської рідини.

### Постановка проблеми

Розглядається Пуазейлівська течія нестисливої бінгамівської рідини по трубці з круговим поперечним перерізом і радіусом  $R$ . Рух описується стаціонарними рівняннями Нав'є-Стокса

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad \Delta \vec{v} = \frac{1}{\mu} \nabla p, \quad (1)$$

де  $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$  - швидкість руху рідини,  $p$  - гідростатичний тиск,  $\mu$  - в'язкість рідини.

Реологічні властивості бінгамівської рідини залежать від граничного напруження зсуву  $\tau_0$  [10]

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu}, & \tau > \tau_0 \\ 0, & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2)$$

де  $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial r$  - швидкість зсуву.

Граничні умови для (1)-(2) є умовами симетрії на осі трубки та прослизання на шорстких стінках трубки [1-4]

$$\left( v - C_1 Kn \frac{\partial v_x}{\partial r} - C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (3)$$

де  $\partial \Omega$  - поверхня трубки,  $C_{1,2} = \text{const}$ ,  $Kn = \lambda / R$  - число Кнудсена,  $\lambda$  - довжина вільного пробігу частинок рідини.

Для класичних макрорідин  $Kn < 0.01$  і (3) відповідає умовам не прослизання на стінках. Для мікрорідин  $0.01 < Kn \leq 0.1$  і останнім доданком в (3) можна знехтувати у порівнянні з першими, що відповідає умовам прослизання першого порядку ( $C_2 = 0$ ) [1-4]. Для нанорідин  $Kn > 0.1$  і  $C_{1,2} \neq 0$ .

Умови (3) отримані шляхом розкладання швидкості рідини біля стінки в ряд Тейлора зі зберіганням двох перших членів ряду. Згідно з експериментальними даними, для більшості нанорідин  $C_1 \in [1; 1.1466]$ ,  $C_2 \in [0.5; 1.309]$  [2].

Як відомо, для випадку течії звичайної бінгамівської рідини з умовами непрослизання на стінках трубки замість (3), розв'язок (1)-(2) має вигляд [10]

$$v(r) = \begin{cases} \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{R\tau_0}{\mu}, & r > R^* \\ \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{2L\tau_0}{R\Delta p}\right)^2, & 0 < r < R^* \end{cases} \quad (4)$$

де  $\Delta p$  - перепад тисків на кінцях трубки,  $L$  - довжина трубки,  $R^* = 2L\tau_0 / \Delta p$  - критичний радіус, який розділяє рідку та квазітверду зони течії (Рис.1).

Загальна об'ємна витрата течії (4) визначається формулою Букінгема [10]

$$Q = Q^p \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{R^*}{R}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R^*}{R}\right)^4\right) = Q^p \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w^p}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w^p}\right)^4\right), \quad (5)$$

де  $Q^p = \Delta p \pi R^4 / (8\mu L)$ ,  $\tau_w^p = \Delta p R / 2L$  - об'ємна витрата і напруження зсуву на стінках в течії Пуазейля ньютонівської рідини.

Напруження зсуву мають лінійний розподіл вздовж радіусу трубки

$$\tau(r) = \frac{(\tau_w + \tau_0)r}{R} - \tau_0, \quad r > R^*, \quad (6)$$

де  $\tau_w = \tau_w^p - \tau_0$  - напруження зсуву на стінці трубки

Треба отримати розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді (4)-(6) за наявності умов прослизання (3).

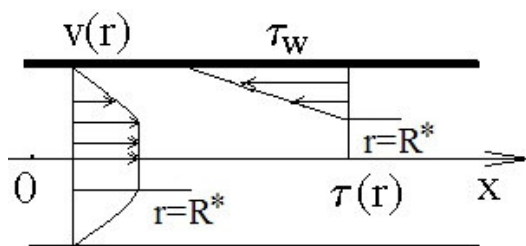


Рис.1. Розподіл швидкостей та напружень зсуву в течії бінгамівської рідини по циліндричній трубці за умовою непрослизання на стінці.

### Метод розв'язання

Ґрунтуючись на (2), розглядаємо  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(\tau)$  як складну функцію, де  $\tau = \tau(r)$ . Тоді

$$\dot{\gamma}(\tau(r)) \equiv \frac{dv}{dr} = \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \frac{\tau_w}{R} \frac{dv}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu}, & \tau > \tau_0 \\ 0, & \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (7)$$

Згідно з (7), при  $\tau > \tau_0$

$$v(\tau) = \frac{R}{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\tau - \tau_0}{\mu} d\tau = \frac{R\tau_w}{2\mu} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_w}\right) \left(1 + \frac{\tau}{\tau_w} - 2\frac{\tau_0}{\tau_w}\right), \quad (8)$$

а при  $\tau < \tau_0$

$$v = \text{const} = v(\tau_0) = \frac{R\tau_w}{2\mu} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^2. \quad (9)$$

Переходячи в (8),(9) від  $\tau$  до  $r$ , отримуємо замість (4)

$$v_{\text{slip}}(r) = \begin{cases} \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left( 1 - \frac{r^2 + 2\text{Kn}(C_1 R + \text{Kn} C_2)}{R^2} \right) - \frac{R\tau_0}{\mu} \left( 1 - \frac{r}{R} + \frac{\text{Kn} C_1}{R} \right), & r > R^*, \\ \frac{\Delta p R^2}{4\mu L} \left( 1 - \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^2 - \frac{2\text{Kn}(C_1 R + \text{Kn} C_2)}{R^2} \right) - \frac{R\tau_0}{\mu} \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_w^p} + \frac{\text{Kn} C_1}{R} \right), & 0 < r < R^*, \end{cases} \quad (10)$$

де  $r^* = 2L\tau_0 / \Delta p$ .

Тоді з (10) для об'ємної витрати замість (5) отримуємо

$$Q_{\text{slip}} = Q^p \left( 1 - 4\text{Kn} \left( \frac{C_1}{R} + \text{Kn} \frac{C_2}{R^2} \right) + 4 \frac{\text{Kn} C_1}{R} \frac{\tau_0}{\tau_w^p} + \left( 2\text{Kn} \left( \frac{C_1}{R} + \text{Kn} \frac{C_2}{R^2} \right) - \frac{4}{3} \right) \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^2 - 4 \frac{\text{Kn} C_1}{R} \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^4 \right), \quad (11)$$

а для напружень зсуву – ту ж саму залежність (6), тому що (10) і (4) відрізняються лише константами, які зникають після диференціювання.

В класичних макрорідинах  $\text{Kn}=0$  і (10),(11) переходять в (4),(5). При тих самих значеннях  $\Delta p$  різниця  $\Delta Q$  між об'ємними витратами (11) і (5) складає

$$\Delta Q = Q^p 2\text{Kn} \left( \frac{2C_1}{R} \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \left( 1 - \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^2 \right) - \left( \frac{C_1}{R} + \text{Kn} \frac{C_2}{R^2} \right) \left( 2 - \left( \frac{\tau_0}{\tau_w^p} \right)^2 \right) \right). \quad (12)$$

Як було показано в [4], при ламінарних течіях ньютонівських мікро/нанорідин за рахунок тангенціального переносу частинок на шорстких стінках  $\Delta Q > 0$ , тобто мікро/нанотрубки та канали мають менші гідравлічні опори, що пояснює результати чисельних експериментів з течіями різних рідин по мікро- та нанотрубках [1-3,5]. З (12) виходить, що для бінгамівської рідин значення  $\Delta Q$  залежать від співвідношень між параметрами стінки  $C_{1,2}$ ,  $\text{Kn}$ , реології рідини  $\tau_0$ , відносного розміру трубки  $R/L$  та режиму руху рідини.

### Результати чисельних розрахунків та їх обговорення

Профілі швидкості у безрозмірному вигляді можна переписати як

$$v^o(r) = \begin{cases} 1 - (r^o)^2 + 2\text{Kn}(C_1^o + \text{Kn}C_2^o) - \zeta(1 - r^o + \text{Kn}C_1^o), & r^o > r^*, \\ 1 - (\tau_{\text{rel}})^2 - 2\text{Kn}(C_1^o + \text{Kn}C_2^o) - \zeta(1 - \tau_{\text{rel}} + \text{Kn}C_1^o), & 0 < r^o < r^*, \end{cases} \quad (13)$$

де  $v^o = \frac{v_{\text{slip}}}{v_{\text{max}}}$ ,  $v_{\text{max}} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}$ ,  $\zeta = \frac{4L\tau_0}{\Delta p R}$ ,  $\tau_{\text{rel}} = \frac{\tau_0}{\tau_w^p}$ ,  $r^o = r/R$ ,  $r^* = R^*/R$ , а вираз (12) для об'ємної витрати – у вигляді

$$Q^o = 1 - 4\text{Kn}(C_1^o + \text{Kn}C_2^o) + 4\text{Kn}C_1^o\tau_{\text{rel}} + \left( 2\text{Kn}(C_1^o + \text{Kn}C_2^o) - \frac{4}{3} \right) (\tau_{\text{rel}})^2 - 4C_1^o (\tau_{\text{rel}})^3 + \frac{1}{3} (\tau_{\text{rel}})^4, \quad (14)$$

де  $Q^o = \frac{Q_{\text{slip}}}{Q^p}$ .

Чисельні розрахунки за (13), (14) проводилися для характерних параметрів ряду мікро- та нанорідин (Табл.1) [1-3,11]. Залежності  $v^o(r)$  для різних наборів параметрів та залежності  $Q^o$  від параметрів  $C_1^o$ ,  $C_2^o$ ,  $\tau_{\text{rel}}$ ,  $\text{Kn}$  наведені на Рис.2-3. Для порівняння зображені також відповідні криві для класичних ( $C_1^o=0$ ,  $C_2^o=0$ ) бінгамівських рідин. Для випадків мікрорідин  $C_2^o=0$  (умови прослизання першого порядку [1-3]).

Таким чином, у порівнянні з класичними рідинами, які задовольняють умовам непрослизання на твердих стінках, мікро- та нанорідини мають як вищі швидкості, так і менші розміри «твердого ядра» потоку бінгамівської рідини (Рис.2а). Поступове збільшення тангенціального переносу моменту на стінках (значення  $C_1$ ) приводить до

поступового збільшення швидкості і зменшення розміру «ядра» (Рис.3а). Кривизна шару Кнудсена на стінках (величина  $C_2$ ) грає незначну роль (Рис.3а) у порівнянні зі впливом  $C_1$  (Рис.2б), а також різних комбінацій  $C_1$  і  $C_2$  (Рис.2а).

Таблиця 1. Параметри деяких мікро- та нанорідин, використаних для чисельних розрахунків.

№	назва	$K_n$	$C_1$ (м)	$C_2$ (м <sup>2</sup> )	$\tau_0$ (мПа)	R(нм)	L(мкм)
1	Наночастинки ZnO+H <sub>2</sub> O	0.6	1.15	0.647	2.6	50	0.5
2	Наночастинки Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> +H <sub>2</sub> O	0.5	1.1	0.934	2.2	50	0.5
3	Наночастинки CuO+H <sub>2</sub> O	0.4	1.3	0.5	2.8	120	1
4	Наночастинки SiO <sub>2</sub> +H <sub>2</sub> O	0.2	1	1.125	2.5	120	1
5	Мікрочастинки резини +H <sub>2</sub> O з гліцерином	0.06	1.5	0	3.2	500	500
6	Суспензія «тіней» еритроцитів	0.04	1.3	0	3.5	500	500
7	кров	0.03	1.4	0	5.1	500	500

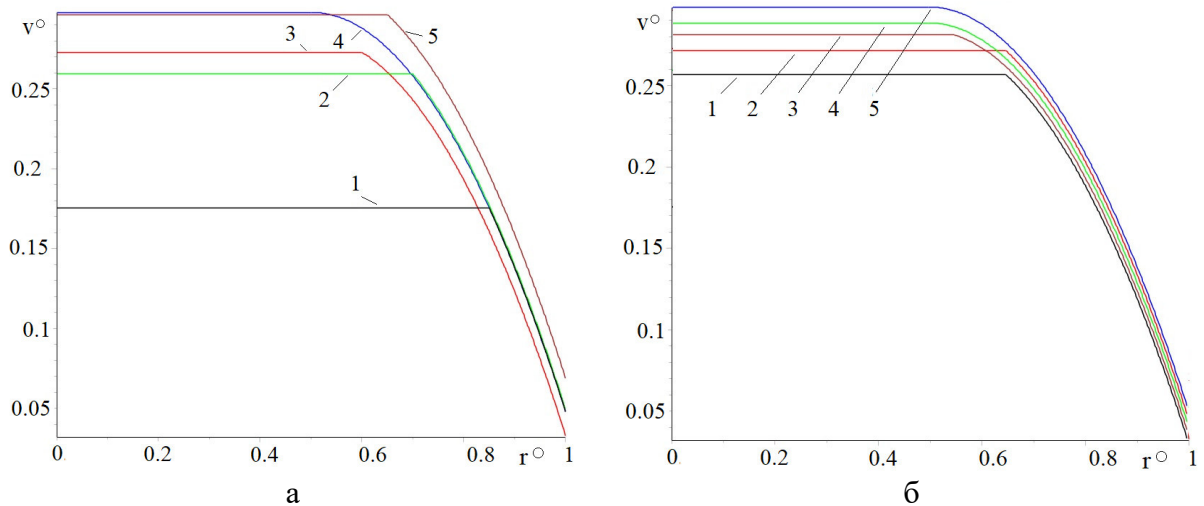


Рис.2. Залежності  $v^o(r^o)$ : для різних наборів параметрів з Табл.1 (а) (крива 1 відповідає класичній, а криві 2-5 - першим 4 рядкам таблиці); для значень  $C_1=0;0.1;0.2;0.3;0.4$  (б).

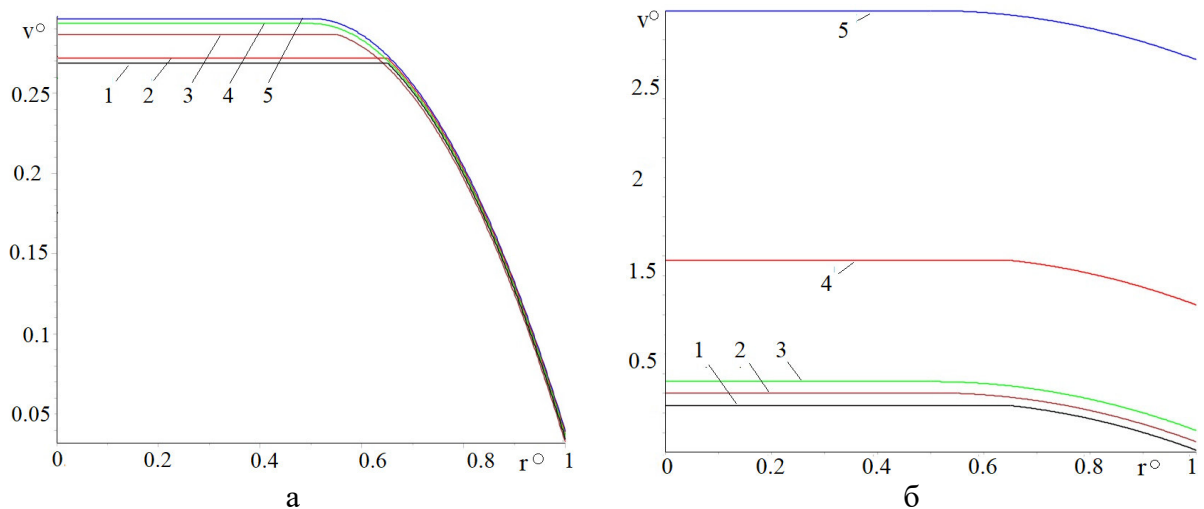


Рис.3. Залежності  $v^o(r^o)$ : для різних наборів параметрів з Табл.1 (а) (крива 1 відповідає класичній, а криві 2-5 - першим 4 рядкам таблиці) для значень  $C_2=0;-0.5;0.1;0.2;0.3$  і (б) для  $K_n=0;0.01;0.05;0.1;0.5;1$ .

Найзначнішу роль грає число  $K_n$ , яке дозволяє при переході від нано- і мікротечій – до класичних рідин з  $K_n=1$  (Рис.3б). Слід зауважити, що на Рис.2-3 наведені відносні (безрозмірні) параметри, тому ті ж самі значення  $r^\circ$  відповідають радіусам 1мм для течій з  $K_n=1$  і радіусам 50нм – для течій з  $K_n=0.01$ . За рахунок підбору параметрів  $K_n, C_1^\circ, C_2^\circ, \tau_{rel}, K_n$  можна отримати течію з необхідними швидкостями в ядрі, шарі Кнудсена та їх відносних розмірів, що дозволяє відокремлювати фізико-хімічні та біологічні процеси, які протікають в зонах течії з високими та низькими значеннями швидкостей зсуву.

### Висновки

В роботі вперше отримані розв'язки системи рівнянь Нав'є-Стокса для течій мікро/нанорідин з умовами прослизання пуршого та другого порядку відповідно та досліджені відмінності профілей швидкості, об'ємної витрати та напружень тертя на стінках трубки в залежності від усіх параметрів задачі. Показано, що за рахунок вибору матеріалів мікро/наночастинок та стінки, параметрів шорсткості стінки, концентрації частинок та режиму руху можна отримати будь-які потрібні для конкретних технологій величин швидкості та розміру ядра бінгамівської рідини.

### Список використаної літератури:

1. Gad-el-Hak, M. The MEMS Handbook / M. Gad-el-Hak. – New York: CRC Press. – 2006.
2. Karniadakis, G.E. Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels / G.E. Karniadakis, S. Garimella, D. Li, S. Kolin, M.N. King. – Elsevier. – 2006.
3. MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices / editor Islam N. – InTech, 2012.
4. Cherevko, V. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions / V. Cherevko, N. Kizilova // *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications*. – 2017. – P. 207-230.
5. Noya, A. Nanofluidics in carbon nanotubes / A. Noya, H.G. Parka, F. Fornasiero, J.K. Holt, S.P. Grigoropoulos, O. Bakajin // *Nanotoday*. – 2007. – V. 2. – P. 22-29.
6. Michael, J.M. Slip over rough and coated surface / J.M. Michael, H.D. Stephen // *J. Fluid Mech.* – 1994. – Vol. 273. – P. 801-817.
7. Hayat, T. Three-dimensional boundary layer flow of Maxwell nanofluid: mathematical model / T. Hayat, T. Muhammad, S.A. Shehzad, et al. // *Appl. Math. Mech. Ed.* – 2015. – Vol. 36. – P. 747-762.
8. Santhosh, N. Flow of a jeffrey fluid through a porous medium in narrow tubes / N. Santhosh, G. Radhakrishnamacharya, A.J. Chamkha // *J. Porous Media*. – 2015. – Vol. 18 (1). – P. 71-78.
9. Zhu, J. Effects of second order velocity slip and nanoparticles migration on flow of Buongiorno nanofluid / J. Zhu, D. Yang, L. Zheng, X. Zhang // *Appl. Math. Letters*. – 2016. – Vol. 52. – P. 183-191.
10. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука. – 1978. – 736 с.
11. Левтов, В.А. Реология крови / В.А. Левтов, С.А. Регирер, Н.Х. Шадрина. – М.: Медицина. – 1982. – 270 с.

### References:

1. Gad-el-Hak, M. (2006). The MEMS Handbook. New York: CRC Press.
2. Karniadakis, G.E., Garimella, S., Li, D., Kolin, S., & King, M.N. (2006). Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels. Elsevier.
3. Islam, N. (Eds.). (2012). MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices. InTech.
4. Cherevko, V., & Kizilova, N. (2017). Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications*. (pp. 207-230).
5. Noya, A., Parka, H.G., Fornasiero, F., Holt, J.K., Grigoropoulos, S.P., & Bakajin, O. (2007). Nanofluidics in carbon nanotubes. *Nanotoday*, 2, 22-29.
6. Michael, J.M., & Stephen H.D. (1994). Slip over rough and coated surface. *J. Fluid Mech*, 273, 801-817.
7. Hayat, T., Muhammad, T., Shehzad, S.A. et al. (2015) Three-dimensional boundary layer flow of Maxwell nanofluid: mathematical model. *Appl. Math. Mech. Ed.*, 36, 747-762.

8. Santhosh, N., Radhakrishnamacharya, G., & Chamkha, A.J. (2015). Flow of a jeffrey fluid through a porous medium in narrow tubes. *J. Porous Media*, 18 (1), 71-78.
9. Zhu, J., Yang, D., Zheng, L., & Zhang, X. (2016). Effects of second order velocity slip and nanoparticles migration on flow of Buongiorno nanofluid. *Appl. Math. Letters*, 52, 183-191.
10. Lojtsiansky, L.G. (1978). *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of fluids and gases]. M.: Nauka [in Russian].
11. Levto, V.A., Regirer, S.A., Shadrina, N.X. (1982). *Reologiya krovi* [Blood rheology]. M.: Medicine [in Russian].

**BATYUK Liliya,**

Candidate of Biological Sciences, Associate Professor of Department of Medical and Biological Physics and Medical Informatics, Kharkiv National Medical University

**KIZILOVA Natalya,**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Applied Mathematics, V.N. Karazin Kharkiv National University

**INVESTIGATION OF FLOWS OF BINGHAM FLUIDS THROUGH THE MICROCHANNELS**

**Summary. Introduction.** *A brief concise literature review on the experimental data of flows of micro- and nanofluids through the micro tubes and ducts and the corresponding theoretical models is given. It is shown, the theoretical estimations based on the Poiseuille formulas for the fluid flows through the ducts of different shaped can be explained by the theory of complex diffusion scatter on the micro- or nanoparticles at the roughness of the tubes' walls which has the same order of magnitude as the particles have.*

**Purpose.** *The aim of the article is to find out the differences in the hydromechanical parameters of the flows of classical Bingham fluids with no-slip boundary conditions at the walls and the micro/nanofluids with the first/second order velocity slip boundary conditions at the same flow regimes.*

**Results.** *The analytical solution for the Bingham fluid flow through a circular tube with velocity slip boundary conditions has been obtained with the same technique that had been used for the classical Bingham fluid flows. The expressions for the velocity profiles, volumetric flow rates, shear stress distributions, wall shear stress and radius of the "solid core" in the Bingham fluid flow has been obtained and compared to the ones for the classical Bingham fluid flows with velocity no-slip boundary conditions. The main parameters influenced the flow differences are the Knudsen number, first and second order velocity slip coefficients,*

**Conclusion.** *The influence of each flow parameter, materials parameters of the particles and basic fluid on the velocity profile of the moving fluid and the "solid core" of the Bingham fluid, its volumetric flow rate through the tube, shear stress distribution and wall shear stress is studied. It is shown, the different variations of the parameters measured in the experimental studies presented in the literature published produce multilateral influence of the velocity and size of the "solid core" of different Bingham fluids. The monotonous increase in the first order slip parameter produced the monotonous growth of the fluid velocity on the slip wall and small variations in the core velocity and size. The second order slip coefficient evoked the smallest influence of the flow parameters. The most significant influence was found for the Knudsen number that corresponds to the transfer from the flows of classical fluids to micro- and then to nanofluids. The presented data is related to the relative (i.e. non-dimensional) data, but the significant acceleration of the nanotube/microtube flows in comparison to the classical flows in the  $> 1$  mm channel width is proven by the obtained formulae and confirmed by the experiments in the nanofluid flows through the bunches of nanotubes (nanofilters) that was estimated as 200 higher than those estimated by the Poiseuille law for circular tubes.*

**Keywords:** *nanofluidics, Bingham fluid, steady flows, rough walls.*

*Одержано редакцією 05.07.2019 р.  
Прийнято до публікації 09.10.2019 р.*