


INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL

GRAIL OF SCIENCE

№ **20**  September, 2022
with the proceedings of the:

IV Correspondence International Scientific and Practical Conference

SCIENTIFIC RESEARCHES AND METHODS OF THEIR CARRYING OUT: WORLD EXPERIENCE AND DOMESTIC REALITIES

held on September 30th, 2022 by

NGO European Scientific Platform (Vinnytsia, Ukraine)

LLC International Centre Corporative Management (Vienna, Austria)



**EUROPEAN
SCIENTIFIC
PLATFORM**




ICCM
International Centre
Corporative Management

Міжнародний науковий журнал «Грааль науки»

№ 20 (вересень, 2022) : за матеріалами IV Міжнародної науково-практичної конференції «Scientific researches and methods of their carrying out: world experience and domestic realities», що проводилася 30 вересня 2022 року ГО «Європейська наукова платформа» (Вінниця, Україна) та ТОВ «International Centre Corporative Management» (Відень, Австрія).


DOI 10.36074/grail-of-science.30.09.2022.019

УЗАГАЛЬНЕНІ РІВНЯННЯ РУХУ РІДИН І ЗВ'ЯЗАНІ ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ ПЕРЕНОСУ НА МІКРО- І НАНОРІВНІ

Батюк Лілія Володимирівна 

канд. біол. наук, доцент, доцент кафедри медичної і біологічної фізики і медичної інформатики

Харківський національний медичний університет, Україна

Кізілова Наталія Миколаївна 

д-р. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри прикладної математики

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Україна

Анотація. Фізичні явища на мікро- та нанорівні мають особливості, які треба враховувати в рівняннях руху. Наприклад, шорсткість стінки має порядок розміру мікро/наночастинок у рідинах, що приводить до дифузійного розсіювання частинок на шорстких стінках і передачі імпульсу вздовж напрямку потоку. Теплопередача в прикордонному шарі рідини посилюється розсіюванням, що спостерігається як стрибок температури на стінках. Крім того, в основних фізичних законах члени з просторовими градієнтами є більш значущими, що приводить до підвищення порядку похідних і зміни типу рівнянь у порівнянні з рівняннями Нав'є-Стокса для класичних рідин. У статті наведений систематичний огляд теоретичних і експериментальних досліджень узагальнених рівнянь руху і зв'язаних з рухом явищ переносу на мікро/нанорівні.

Ключові слова: мікро/наноплюїдика, суспензія, механіка рідини, теплопереніс, зв'язані явища.

1. Вступ.

Течії рідин і відповідні фізичні процеси на мікро/нанорівнях визначаються загальними законами балансу для маси, імпульсу і енергії, але відповідні рівняння мають бути узагальнені для врахування малого масштабу руху і швидких явищ [1-3]. Крім того, необхідно модифікувати граничні умови (ГУ) на поверхнях розділу рідина-тверде тіло [2-4]. Численні експериментальні дані виявили помітну розбіжність між виміряними залежностями $Q(\Delta p)$ між об'ємною швидкістю (ОШ) потоку Q крізь канал і стрибком тиску Δp на кінцях каналу, та відповідними теоретичними, які розраховані на моделі Пуазейля течії класичної рідини крізь канал/трубку з круглою/прямокутною/трикутною/трапецієподібною чи іншою геометрією [5-8]. Виміряні значення гідралічного опору $Z_h = \Delta p / Q$ були на ~10-90% вищими за теоретичні значення, а деякі з них на ~350% перевищували теоретичні прогнози. Пояснення цього феномену ґрунтується на дифузійному розсіюванні частинок на шорсткості стінки, яка на мікро/нанорівні спів розмірна з частинками рідини. Відбиття частинок у

напрямку течії розглядається як прослизання на стінці. Це явище було спочатку виявлене у течіях розріджених газів [9] і теплопереносу між газом і стінкою [1,2]. Пізніше було показано його наявність при течіях суспензій мікро/наночастинок у рідині (мікро- і нанорідини, відповідно) [1-3,9]. Важливість узагальненого закону теплопередачі замість закону Фур'є для рівняння теплового балансу була показана в численних теоретичних та експериментальних дослідженнях [1-4, 10], але остаточної згоди до структури узагальнених рівнянь руху ще немає.

В роботі обговорюються сучасні підходи до формулювання системи рівнянь руху мікро/нанорідин з урахуванням узагальнених законів тепломасопереносу і ГУ. Для стаціонарних течій крізь мікро/нано канали або трубки отримані аналітичні та напіваналітичні розв'язки, які є важливими для валідації методів чисельного розв'язання відповідних задач у більш складних геометріях.

2. Дифузійне розсіювання на стінках і узагальнені моделі.

Широке використання мікроелектромеханічних систем (MEMS), які засновані на мікрофлюїдних технологіях, виявила важливість ГУ прослизання руху і стрибку температур на стінках каналів [2,3]. Течії нанорідин по мікротрубках використовуються як теплообмінники для охолодження мікропроцесорів і чипів, мініатюрні газові хроматографічні системи для виявлення забруднювачів, невеликі хімічні та біореактори для медичних і біологічних цілей [1-4]. Залежності $Q(\Delta p)$ в MEMS визначаються числом Кнудсена ($Kn = \lambda/h$), яке є відношенням довжини вільного пробігу λ молекули до характерного розміру h шорсткості канала. При $Kn \ll 1$ газ/рідину можна розглядати як безперервне середовище, рух якого відповідає рівнянням гідродинаміки, тоді як при $Kn \sim 1$ рух молекул треба моделювати на основі кінетичної теорії.

У гідродинамічному режимі передбачається, що властивості течії знаходяться в локальній термодинамічній рівновазі з навколишнім середовищем, і існують лінійні залежності між термодинамічними силами та потоками, а саме

1. Закон теплопровідності Фур'є

$$\vec{J}_T = -k\nabla T, \quad (1)$$

2. Закон дифузії Фіка

$$\vec{J}_D = -D\nabla C, \quad (2)$$

3. Закон фільтрації Дарсі

$$\vec{J}_m \equiv \rho_f \vec{v} = -\frac{K\rho_f}{\mu_f} \nabla p, \quad (3)$$

4. Закон Ома

$$\vec{J}_e = -\rho_e \nabla \varphi_e, \quad (4)$$

де: T - температура, k і D - коефіцієнти теплопровідності і дифузії, C - концентрація частинок, ρ_f, μ_f - густина і в'язкість рідини, p - гідростатичний

тиск, K – проникність пористого середовища, ρ_e – густина електричного заряду, φ_e – електричний потенціал.

Ґрунтуючись на численних експериментальних дослідженнях, можна виділити наступні режими течій рідини [2,3]

- 1) Континуальні течії (класичні рідини) : $Kn < 0.001$,
- 2) Течії з прослизанням (слаборозріджені) : $0.001 < Kn < 0.1$,
- 3) Перехідний режим (помірно розріджені) : $0.1 < Kn < 10$,
- 4) Вільний молекулярний рух (сильнорозріджені) : $10 < Kn$.

Для течій нанорідин ГУ прослизання у загальному випадку неізотермічної шорсткої стінки мають вигляд [9,10]

$$\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}_w - \alpha Kn \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} + \beta Kn^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}^2} - \xi Kn^2 \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (5)$$

$$\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_w - \zeta \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

де: \mathbf{v} і \mathbf{v}_w швидкості, а \mathbf{T} і \mathbf{T}_w – температури рідини і твердої стінки; $\bar{\mathbf{n}}$ і $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ – нормаль і дотична до стінки; $\alpha = (2 - \sigma) / \sigma$, $\beta \in [0.5; 1.31]$, $\xi = 3(\gamma - 1) \text{Re} / (2\pi\gamma \text{Ec})$, $\zeta = 2\gamma(2 - \sigma_T) / (\gamma + 1)\sigma_T \text{Pr}$, σ і σ_T – коефіцієнти тангенціального перенесення імпульсу і тепла; $\gamma = c_p / c_v$ – відношення питомих теплоємностей рідини при сталих тиску і об'єму; $\text{Re} = \rho_f \mathbf{v} h / \mu_f$, $\text{Pr} = c_p \mu_f / k$, $\text{Ec} = v^2 / c_p \Delta T$ – числа Рейнольдса, Прандтля і Екерта.

При $\alpha, \beta, \xi, \zeta = 0$ (5) дають ГУ для класичної рідини; при $\beta, \xi = 0$ – для мікрорідини, а при $\alpha, \beta, \xi, \zeta \neq 0$ – для нанорідини. Кращу відповідність руху мікро/нанорідин до теоретичних розрахунків з ГУ (5) було підтверджено в експериментах з потоками ньютонівської рідини в каналах з гладкими [1,2] і пористими стінками [2,6], біологічних рідин [4,5,11], полімерних розчинів [7,8] та ін. В [12,13] були запропоновані суперекспоненціальні апроксимації ГУ (5).

Узагальнені моделі переносу включають похідні за часом (швидкі процеси) і градієнти потоків і мають ускладнену форму у порівнянні з класичними законами [1-4]. Так, закон переносу тепла замість (1) має форму

$$\tau_{\text{rel}}^{\text{th}} \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}_{\text{th}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{J}}_{\text{th}} = -k \nabla T + \kappa^{\text{th}} \nabla^2 \bar{\mathbf{J}}_{\text{th}}, \quad (6)$$

де: $\tau_{\text{rel}}^{\text{th}}$ і $\bar{\mathbf{J}}_{\text{th}}$ – час релаксації і вектор потоку тепла, κ^{th} – характерний масштаб.

Закон дифузії замість (2) має вигляд

$$\tau_{\text{rel}}^{\text{D}} \frac{\partial \bar{\mathbf{J}}_{\text{D}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{J}}_{\text{D}} = -D \nabla C + \kappa^{\text{D}} \nabla^2 \bar{\mathbf{J}}_{\text{D}}, \quad (7)$$

де: τ_{rel}^D і \vec{J}_D - час релаксації і дифузійний потік маси, κ^D - характерний масштаб.

Аналогічний вигляд мають узагальнені закони фільтрації (3) і Ома (4).

3. Узагальнена модель переносу тепла в течіях мікро/нанорідин.

З рівняння балансу тепла [11] і узагальненого закону переносу тепла (7) маємо рівняння для температури

$$\tau_{rel}^{th} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa^{th} \frac{\partial}{\partial t} \Delta T = \mathcal{G} \Delta T + \frac{1}{\rho c_p} \left(\sigma_{th} + \tau_{rel}^{th} \frac{\partial \sigma_{th}}{\partial t} - \kappa^{th} \Delta \sigma_{th} \right), \quad (8)$$

де: $\mathcal{G} = k / \rho c_p$ - термодифузивність, σ_{th} - розподілені джерела тепла.

У випадку мікрорідин ($\kappa^{th} = 0$) гіперболічне рівняння (8) описує розповсюдження хвиль тепла зі швидкістю $c = \sqrt{\mathcal{G} / \tau_{rel}^{th}}$. У випадку нанорідин похідні за простором мають характерний розмір $\nabla^2 \sim 10^{-18}$, а тому $|\vec{J}_T| / |\nabla^2 \vec{J}_T| \ll \kappa^{th}$ і при $\sigma_{th} = 0$ (8) можна звести до рівняння Пуазейлівського типу, яке описує фононну гідродинаміку [1-3,11]

$$\Delta \vec{J}_T = \frac{k}{\kappa^{th}} \nabla T, \quad (9)$$

де \vec{J}_T , T , κ^{th} / k еквівалентні величинам \vec{v} , p , μ_f в течії Пуазейля.

Узагальнений закон (8) описує розповсюдження хвиль тепла в залежності від частоти (дисперсія). Розглянемо розв'язок (8) в стандартній формі

$$T(t, x) = T^* e^{i\omega(t-x/c)}, \quad (10)$$

де: T^* - амплітуда хвилі, $m = \omega / c$ - хвильове число.

Підстановка (10) в (8) дає наступні вирази для швидкості хвилі c , фазової швидкості v_p і довжини послаблення хвилі L_a :

$$c^2 = \frac{\mathcal{G} + i\kappa\omega}{\tau\omega - i} \omega, \quad \psi = a \tan \left(\frac{\mathcal{G} + \tau\kappa\omega^2}{\kappa - \tau\mathcal{G}} \right), \quad (11)$$

$$v_p = \frac{\omega}{\text{Re}(m)} = \sqrt{\frac{(\mathcal{G}^2 + \kappa^2\omega^2)\omega}{\tau^2\kappa^2\omega^4 + (\tau^2\mathcal{G}^2 + \kappa^2)\omega^2 + \mathcal{G}^2}} \cos^{-1}(\psi / 2), \quad (12)$$

$$L_a = (\text{Im}(m))^{-1} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}^2 + \kappa^2\omega^2}{(\tau^2\kappa^2\omega^4 + (\tau^2\mathcal{G}^2 + \kappa^2)\omega^2 + \mathcal{G}^2)\omega}} \sin^{-1}(\psi / 2). \quad (13)$$

Якщо $\kappa = 0$ в низькочастотному $\omega\tau_{rel} \ll 1$ (11)-(13) переходять в формули $c = \sqrt{\mathcal{G} / \tau}$, $v_p = \sqrt{2k\omega}$, $L_a = \sqrt{2k / \omega}$, які відповідають класичному закону (1). У випадку біологічних тканин $\sigma_{th} \neq 0$ і формули (11)-(13) можуть бути узагальнені,

що важливо для детальнішого вивчення проблем терморегуляції, оцінки дози інфрачервоного опромінювання тіла в терапевтичних цілях або охолодження при хірургічних операціях. Чисельні оцінки за (11)-(13) можуть бути проведені ляхом підстановки індивідуальних параметрів тканин [11].

4. Узагальнена реологічна модель.

Ламінарні і турбулентні течії ньютонівських рідин можна моделювати на основі рівнянь Нав'є-Стокса для стисливих і нестисливих рідин та їх модифікацій [2-4, 11]. ГУ (4) дозволяють точніше оцінювати в'язкісні та теплові ефекти при повільних ($Re < 1$) стаціонарних течіях рідин і відносно великих просторових масштабах ($\kappa \sim 0$). Правильні оцінки зв'язаних термомеханічних явищ у мікро/наномасштабах можна провести, якщо врахувати більш загальні фізичні закони (7) та ін. замість класичних (1)-(4). Нелінійні залежності між тензорами в'язких напружень ($\hat{\tau}$) і швидкості деформації (\hat{v}) за наявності швидких процесів на малих масштабах можна описати узагальненим реологічним законом [14]

$$\tau' \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial t} + \hat{\tau} = 2\mu \left(\hat{v} + \tau'' \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right) + \tilde{\mu} \hat{v}^2, \quad (14)$$

де: τ', τ'' - часи релаксації і ретардації напружень, $\tilde{\mu}$ - трансверсальна в'язкість.

Підстановка (14) до рівняння балансу імпульсу

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \text{div}(\hat{\tau}) \quad (15)$$

дає узагальнене рівняння руху неньютонівської рідини з трансверсальною в'язкістю у вигляді

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \tau' \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \tau' \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = \\ = -\nabla p + \tau' \frac{\partial}{\partial t} \nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \tau'' \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{v} + \tilde{\mu} \text{div}(\hat{v}^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Рівняння (16) разом з рівнянням балансу маси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (17)$$

дає систему двох диференціальних рівнянь в часткових похідних (ДРЧП) для обчислення швидкості і тиску $\{\vec{v}(t, \vec{r}), p(t, \vec{r})\}$.

Розв'язок системи (16)-(17) також можна знайти у стандартній формі (для спрощення розглядається 1D випадок)

$$v(t, x) = v^* e^{i\omega(t-x/c)}, \quad p(t, x) = p^* e^{i\omega(t-x/c)}, \quad (18)$$

де: v^*, p^* - амплітуди швидкості і тиску.

Підставимо (18) в (16)-(17) і після лінеаризації навколо стаціонарної точки $(p, v) = (p_0, 0)$, $p_0 = \text{const}$ отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

для амплітуд:

$$\begin{vmatrix} \rho(i\omega - \omega^2\tau') + \mu(1+i\omega\tau'')\frac{\omega^2}{c^2} & -\frac{i\omega}{c}(1+i\omega\tau') \\ -\rho\frac{\omega}{c} & \frac{\Theta}{\rho_0}\omega \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* \\ \mathbf{p}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

де: $\Theta = \rho_0 \partial \rho / \partial p|_{p=p_0}$ - стисканість рідини.

Умова сумісності для матриці (19) дає дисперсійне співвідношення для швидкості хвилі

$$c^2 = \frac{(1+i\omega\tau'')\Theta\mu\omega - i\rho\rho_0(1+i\omega\tau')}{\rho(\omega\tau' - i)\Theta}. \quad (20)$$

Фазова швидкість \mathbf{v}_p і довжина послаблення хвилі \mathbf{L}_a у цьому випадку

$$\mathbf{v}_a = \Xi^{-1} \cos^{-1}(\psi/2), \quad \mathbf{L}_a = \Xi^{-1} \omega^{-1} \sin^{-1}(\psi/2), \quad (21)$$

$$\text{де: } \Xi = \sqrt{\frac{(\rho\Theta\omega\tau'B_1 + B_2)^2 + \rho^2\Theta^2(B_1 + \omega\tau'B_2)^2}{B_1^2 + B_2^2}}, \quad \psi = -a \tan\left(\frac{B_1 + \omega\tau'B_2}{\rho\Theta\omega\tau'B_1 + B_2} \rho\Theta\right),$$

$$B_1 = \mu\Theta\omega + \rho\rho_0\omega\tau', \quad B_2 = \omega^2\tau''\Theta - \rho\rho_0.$$

Задачі зв'язаного тепло- та масообміну в мікро/наносистемах необхідно розглядати на основі системи рівнянь (8), (16)-(17) з ГУ (5). Проблеми стабільності течій можна досліджувати на основі рівнянь (16)-(17) для стаціонарного руху з ГУ (5) в неізотермічному випадку. Тоді відповідну систему (ДРЧП) необхідно лінеаризувати навколо сталої точки і розглядати розв'язок системи у вигляді (10), (18) з малими амплітудами $\mathbf{v}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{T}^*$.

5. Узагальнений закон дифузії.

Підставимо вектор дифузійного переносу $\vec{\mathbf{J}}_D$ із узагальненого закону (2) до рівняння дифузії, яке витікає із закону збереження маси

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(\vec{\mathbf{J}}_D) \quad (22)$$

і отримаємо узагальнене рівняння дифузії на мікро/нанорівні у вигляді

$$\tau_{\text{rel}}^D \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{\partial C}{\partial t} - \kappa^D \frac{\partial}{\partial t} \Delta C = D \Delta C. \quad (23)$$

У випадку $\kappa^D \sim 0$ рівняння (23) описує розповсюдження концентраційних хвиль зі швидкостями $c = \sqrt{D/\tau_{\text{rel}}^D}$. В 1D випадку розв'язок (23) можна знайти у вигляді залежностей $C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = C^* e^{i\omega(t-x/c)}$, які аналогічні (10), (18). Підстановка в (23) дає наступні вирази для швидкості хвилі \mathbf{c} , фазової швидкості \mathbf{v}_p і довжини послаблення хвилі \mathbf{L}_a :

$$c = \omega \sqrt{\frac{(D\tau_{\text{rel}} - \kappa)^2 \omega^2 + (D + \tau_{\text{rel}}\kappa\omega^2)^2}{(\tau_{\text{rel}}^2 \omega^2 + 1)}}, \quad (24)$$

$$v_p = \sqrt{P\omega} \cos^{-1}(\psi/2), \quad L_a = \sqrt{\frac{P}{\omega}} \sin^{-1}(\psi/2),$$

$$\partial \epsilon: \psi = a \tan\left(\frac{D + \omega^2 \kappa \tau_{\text{rel}}}{\omega(\kappa - \tau_{\text{rel}} D)}\right), \quad P = \frac{D^2 + \omega^2 \kappa^2}{(\omega^4 \kappa^2 \tau_{\text{rel}}^2 + \omega^2 (\tau_{\text{rel}}^2 D^2 - \kappa^2) + D^2)}.$$

Безпосередні чисельні розрахунки закономірностей розповсюдження концентраційних хвиль вздовж заповнених суспензіями наночастинок достатньо довгих мікротрубок можуть бути отримані для різних речовин у розчинах шліхом підстановки відповідних параметрів в формули (24). Наприклад, у рослин розповсюдження сигналів у вигляді концентраційних хвиль і дифузійно-конвективного переносу іонів і сигнальних молекул (гормонів та ін.) вздовж мікротрубок провідних шляхів ксилеми і флоєми лежить в основі швидкої комунікації між корінням, листям, квітами та навколишнім середовищем [15].

Узагальнення закону Ома (4) на випадок проходження електричного струму крізь нанодріт або інші нановолокна може бути проведений по аналогії з (1)-(3).

Висновки. Аналіз експериментальних вимірювань залежностей $Q(\Delta p)$ і переносу тепла на мікро/нанорівні показав розбіжність з класичною теорією. Запропоновані нові узагальнені форми законів Фур'є, Фіка, Дарсі і Ома, які враховують швидкі процеси і значні градієнти величин на нанорівні, а також умови прослизання швидкості і стрибка температури на поверхнях рідина-тверде тіло, які обумовлені дифузним розсіюванням частинок на шорстких стінках. В роботі виведені рівняння руху рідини, переносу тепла і дифузії частинок з урахуванням перелічених особливостей та отримані розв'язки відповідних рівнянь у вигляді хвиль з малими амплітудами.

Список використаних джерел:

- [1] Petersen N.O. (2017) Foundations for Nanoscience and Nanotechnology, CRC Press.
- [2] Gad-el-Hak M. (2006) MEMS Introduction and fundamentals, The MEMS Handbook, Second ed., Taylor & Francis Group, LLC.
- [3] Islam N. (2012) MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices, InTech Publisher.
- [4] Batyuk L.V., Kizilova N.N. (2019) Maghethohydrodynamic flows of micro/nano fluids through thin capillaries. Bulletin of Taras Shevchenko National University, (3), 32-36. Вилучено з: <https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/article/view/106/0>.
- [5] Mala G.M. & Li D.Q. (1999) Flow characteristics of water in microchannels. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20, 142–148. Вилучено з: [https://doi.org/10.1016/S0142-727X\(98\)10043-7](https://doi.org/10.1016/S0142-727X(98)10043-7).
- [6] Tang G.H., Li Zhuo, He Y.L., & Tao W.Q. (2007) Experimental study of compressibility, roughness and rarefaction influences on microchannel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50, 2282–2295. Вилучено з: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.10.034>.
- [7] Weilin A., Mala Gh.M. & Dongqing L. (2000) Pressure-driven water flows in trapezoidal

- silicon microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43, 353–364. Вилучено з: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00148-9](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00148-9).
- [8] Wang H. & Wang Y. (2007) Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28, 220–228. Вилучено з: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.08.005>.
- [9] Zhang W.-M., Meng G. & Wei X. (2012) A review on slip models for gas microflows. *Microfluidics and Nanofluidics*, 13, 845–882. Вилучено з: <https://doi.org/10.1007/s10404-012-1012-9>.
- [10] Tzou D.Y. (1997) *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, New York, Taylor and Francis.
- [11] Kizilova N. & Korobov A. (2019) Bioheat Equation with Fourier and Non-Fourier Heat Transport Laws: Applicability to Heat Transfer in Human Tissues. *Journal of Thermal Engineering*, 5, 149–161. Вилучено з: [10.18186/thermal.653915](https://doi.org/10.18186/thermal.653915).
- [12] Crowdy D.G. (2021) Slip length formulas for longitudinal shear flow over a superhydrophobic grating with partially filled cavities. *Journal Fluid Mechanics*, 925, 105–129. Вилучено з: <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.709>.
- [13] Aminpour M., Torres S.A.G., & Li L. (2021) Slip-flow regimes in nanofluidics: a universal superexponential model. *Physics Review Applied*, 15, 054051. Вилучено з: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.15.054051>.
- [14] White F.M. (2011) *Fluid Mechanics*, 7-th edition. McGraw-Hill.
- [15] Kizilova N. (2007) Load transfer from the fiber into the growing medium. *Proceedings of Estonian Academy Sciences*, 56, 162–169. Вилучено з: https://kirj.ee/public/Phys_Math/2007/issue_2/phys-2007-2-12.pdf.