# Математическая теорія прибора Barnard'а и Hill'я для опредѣленія кровяного давленія

проф. Г. Колосова

(сообщено въ засѣданіи 11-го ноября 1904 г.).

Въ настоящей замѣткѣ [1]) мы даемъ теоретическое объясненіе принципу, положенному въ основаніе прибора Hill'я и Barnard'а [2]) для опредѣленія кровяного давленія.

Этотъ приборъ состоитъ изъ кожанаго браслета надѣваемаго (если дѣло идетъ объ опредѣленіи кровяного давленія въ плечевой артеріи человѣка) на плечо, а внутри браслета находится резиновая подушечка, охватывающая послѣднее. Подушечка сообщается съ насосомъ (напоминающимъ насосъ отъ велосипеда) и манометромъ; приступая къ опыту, въ подушечку накачиваютъ воздухъ и тогда замѣчаютъ, что начиная съ нѣкотораго момента біеніе пульса въ артеріи начнетъ передаваться воздуху въ подушечкѣ, который начнетъ пульсировать и эти пульсаціи обнаруживаются манометромъ. При увеличеніи давленія пульсаціи въ подушечкѣ увеличиваются до нѣкотораго предѣла, послѣ

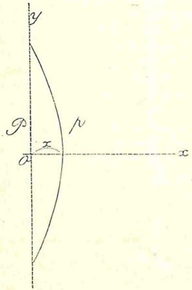
---

1) Составленной по просьбѣ проф. спец. патологіи и клиники А. И. Яроцкаго, который съ этимъ приборомъ произвелъ рядъ интересныхъ наблюденій (см. д-ръ А. И. Яроцкій „Къ клинической методикѣ опредѣленія кровяного давленія". Русскій Архивъ Патологіи, Клинич. Мед. и Бактер. 1901 г.).

2) Hill and Barnard. British med. Journ. 2. Oct. 1897 стр. 904.

котораго увеличеніе давленія въ подушечкѣ начинаетъ способствовать уже уменьшенію въ ней пульсаціи. Принципъ Marey'я, лежащій въ основаніи этого прибора, заключается въ томъ, что наибольшія пульсаціи подушечки (и слѣд. наибольшая амплитуда колебаній стрѣлки манометра) соотвѣтствуютъ тому моменту, когда давленіе въ подушечкѣ дѣлается равнымъ давленію въ артеріи.

Чтобы разсмотрѣть вопросъ теоретически, допустимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую упругую перепонку, покрывающую какое нибудь (напр. круглое) отверстіе. Въ нашемъ случаѣ этой перепонкѣ будутъ соотвѣтствовать кожа, подкожная клѣтчатка, фасція, стѣнки артеріи и т. д. на томъ промежуткѣ, гдѣ артерія близко подходитъ къ наружной поверхности кожи, такъ что ощутительно ея біеніе. Пусть съ одной стороны перепонки давленіе $p$, а съ другой $P > p$. Перепонка выгнется тогда въ сторону, гдѣ давленіе меньше и сѣченіе ея плоскостью $\perp$-ною къ нейтральному ея положенію (при $p = P$), которое мы предположимъ плоскимъ, дастъ кривую изображенную на чертежѣ.




Разсмотримъ равновѣсіе элемента (масса котораго на единицу поверхности равна $m$) этой перепонки, лежащаго на оси $ox$, по отношенію къ которой мы предположимъ перепонку симметрично выпученной (а за ось у-овъ мы примемъ пересѣченіе вышеупомянутой плоскости съ нейтральнымъ положеніемъ перепонки). На поверхность элемента дѣйствуютъ:





во 1-хъ) давленіе $P$ (на единицу поверхности) съ лѣвой стороны;

во 2-хъ) давленіе $p$ (на единицу поверхности) съ правой;

въ 3-хъ) сила упругости, стремящаяся вернуть его въ нейтральное положеніе (на оси $Oy$).

По симметріи расположенія перепонки сила упругости, дѣйствующая на элементъ направлена по $ox$ къ $O$ и величину ея мы предположимъ равною (на единицу поверхности)

$$\mu^2 f(x),$$

гдѣ $\mu^2$.... нѣкоторый коэф-нтъ пропорціональности, $x$.... разстояніе элемента отъ $O$, а $f(x)$ функція, которую мы предположимъ удовлетворяющей слѣдующимъ условіямъ:

1) $f(o) = o$, т. к. при $x = o$ — нейтральное положеніе

2) $f(x)$, всѣ ея производныя, а также

$$\psi(x) = \int f(x)\,dx \qquad (1)$$

возрастаютъ вмѣстѣ съ $x$ (или остаются постоянными) при $x > o$. Этому условію удовлетворяютъ большинство эмпирическихъ формулъ, предложенныхъ для величины силы упругости при обыкновенномъ растяженіи. Таковы напр. параболическіе законы вида

$$f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad (\alpha, \beta, \gamma > o)$$

или формула Imbert (1880), предложенная затѣмъ спеціально для кожи и обожженой глины Hartwig'омъ:

$$f(x) = k(e^{mx} - 1), \text{ (гдѣ } k \text{ и } m \text{ — постоянныя } > o).$$

Такимъ образомъ для равновѣсія элемента мы имѣемъ:

$$-\mu^2 f(x) + P - p = o.$$

Обозначимъ наименьшій положительный корень этого ур-ія (соотвѣтствующій положенію равновѣсія) черезъ $x_o$, такъ что:

$$-\mu^2 f(x_o) + P - p = o \qquad (2)$$

и представимъ себѣ, что въ этомъ положенiи въ нѣкоторый моментъ $t = o$ мы сообщили элементу нѣкоторый импульсъ, такъ что онъ пришелъ въ движенiе съ нѣкоторою скоростью $v_o$. Диф-ое ур-iе движенiя будетъ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 f(x) + P - p\,.$$

Такъ какъ при $t = o$ $x = x_o$, $v = v_o$, то интегралъ живой силы для разсматриваемаго движенiя напишется въ видѣ: [1])

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_o^2 - 2\mu^2\int_{x_o}^{x} f(x)\,dx + 2(P-p)(x - x_o)$$

откуда получается окончательный интегралъ разсматриваемаго движенiя въ видѣ:

$$\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\sqrt{v_o^2 - 2\mu^2\int_{x_o}^{x} f(x)\,dx + 2(P-p)(x-x_o)}} = t$$

или

$$\int_{x_o}^{x}\frac{dx}{\sqrt{v_o^2 - 2\mu^2\big(\psi(x) - \psi(x_o)\big) + 2(P-p)(x-x_o)}} = t\,.$$

Далѣе мы различимъ 2 случая:

1) Скорость $v_o$ направлена въ сторону $> o$ $x$-овъ; тогда $x$, соотвѣтствующiй крайнему положенiю (наибольшему размаху) является ближайшимъ бо́льшимъ $x_o$ корнемъ ур-iя

$$v_o^2 - 2\mu^2\big(\psi(x) - \psi(x_o)\big) + 2(P-p)(x-x_o) = o\,. \quad (3)$$

---

1) Для упрощенiя формулъ мы положимъ $m = 1$.





Замѣчая, что

$$\psi(x) - \psi(x_o) = (x-x_o)\psi'(x_o) + \frac{(x-x_o)^2}{1\,.\,2}\psi''(x_o) + \ldots.$$

мы найдемъ изъ (3) на основанiи (1) и (2):

$$\frac{v_o^2}{2\mu^2} = \frac{(x-x_o)^2}{1\,.\,2}\psi''(x_o) + \frac{(x-x_o)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\psi'''(x_o) + \ldots.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при одномъ и томъ же импульсѣ (а слѣдов. и $v_o$) чѣмъ меньше $x_o$ (и чѣмъ слѣд. меньше $\psi''(x_o)$, $\psi'''(x_o)\ldots$), тѣмъ больше $x - x_o$, а т. к. $x - x_o$ есть величина размаха, то чѣмъ ближе положенiе перепонки къ нейтральному, тѣмъ размахи ея больше.

2) Скорость $v_o$ направлена въ сторону $< o$ $x$-овъ, тогда $x$, соотвѣтствующiй крайнему положенiю явится ближайшимъ меньшимъ $x_o$ корнемъ ур-iя (3), которое, имѣя въ виду, что:

$$\psi(x_o) - \psi(x) = \psi'(x)(x_o - x) + \frac{\psi''(x)}{1\,.\,2}(x_o-x)^2 + \ldots.$$

на основанiи (1) и (2) мы перепишемъ въ видѣ:

$$\frac{v^2}{2\mu^2} = \big(\psi'(x_o) - \psi'(x)\big)(x_o - x) - \frac{\psi''(x)}{1\,.\,2}(x_o-x)^2 - $$
$$- \frac{\psi'''(x)}{1.2.3}(x_o-x)^3 - \ldots.$$

или т. к.

$$\psi'(x_o) - \psi'(x) = (x_o-x)\psi''(x) + \frac{(x_o-x)^2}{1\,.\,2}\psi'''(x) + \ldots;$$

$$\frac{v^2}{2\mu^2} = \psi''(x)\frac{1}{1\,.\,2}(x_o-x)^2 + \psi'''(x)\frac{2}{1\,.\,2\,.\,3}(x_o-x)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \psi^{(n)}(x)\frac{n-1}{1\,.\,2\ldots n}(x_o-x)^n + \ldots \quad (4)$$

Замѣтимъ, что изъ ур-iя (3) слѣдуетъ, что при уменьшенiи $x_o$ уменьшается и соотвѣтствующiй корень $x$.

А тогда изъ ур-ія (4) очевидно, что съ уменьшеніемъ $x_o$ (а слѣдов-о и $x$) $x_o - x$ должно возрастать, т. е., что и здѣсь меньшему отклоненію отъ нейтральнаго положенія соотвѣтствуетъ бо́льшій размахъ колебаній.

Итакъ, какъ бы не была направлена первоначальная скорость, чѣмъ дальше перепонка будетъ выведена изъ нейтральнаго положенія, тѣмъ меньше будетъ амплитуда ея колебаній и слѣд-о наибольшая амплитуда соотвѣтствуетъ $x_o = o$ (т. е. $P = p$), въ чемъ и заключается принципъ Marey'я.