

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

# **ВІСНИК**

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**

**ВИПУСК №4 2017**

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,  
випуск №4, 2017,**

**Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

**Редакційна колегія:**

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;  
Хусаїнов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;  
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;  
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;  
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;  
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;  
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;  
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;  
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;  
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;  
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;  
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;  
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;  
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;  
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;  
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;  
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;  
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;  
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;  
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;  
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;  
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;  
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;  
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;  
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;  
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;  
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;  
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;  
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

**Редакційний відділ:**

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;  
Безущак Оксана Омелянівна, [bezusch@univ.kiev.ua](mailto:bezusch@univ.kiev.ua);  
Стукаленко Вікторія Віталіївна, [stu@univ.kiev.ua](mailto:stu@univ.kiev.ua);  
Родіонова Тетяна Василівна, [rodtv@univ.kiev.ua](mailto:rodtv@univ.kiev.ua);  
П'ятецька Олена Василівна, [visnyk\\_phys-math@ukr.net](mailto:visnyk_phys-math@ukr.net);  
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, [slm-klm@ukr.net](mailto:slm-klm@ukr.net).

**Адреса редакційної колегії:**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49  
ISBN 978-966-2142  
ISSN 1812-5409

## ЗМІСТ

### АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко Д.О. Неавтономне стохастичне логістичне диференціальне рівняння з нецентрованою мірою Пуассона	9
Мішура Ю.С., Железняк Г.С. Екстремальні міри для ентропійних функціоналів	15

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Батюк Л.В., Кізілова Н. М. Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин	23
Беспалова О.І., Яремченко Н.П. Визначення напружено-деформованого стану спряжених гнучких оболонок обертання при докритичних навантаженнях	29
Кізілова Н. М., Коробов А.М. Моделювання мікроциркуляції крові та тепломасопереносу в тканинах людини	37
Мартинюк А.А., Хорошун А.С. До теорії одноланкового маніпулятора із пружним зчленуванням	43
Петрищев О. М., Романюк М. І. Математичне моделювання перетворювачів електромагнітного типу в режимі збудження ультразвукових хвиль	47
Хорошун А.С. Про стабілізацію руху TORA	53

### КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Fabunmi Sunmade Семантика деяких атомарних операторів у IPCL	59
Волошин О.Ф., Супрун О.О., Ковальов Д.І. Методи адаптивного оцінювання у тестувально-методичних системах електронного навчання	63
Деревянченко О.В., Сакевич Р.Д. Застосування системи ПАРКС-Java та Google Cloud Platform для хмарних обчислень	69
Завадський І.О., Кабан В.О. Удосконалення обчислення зсуву вікна пошуку для пошукових алгоритмів MAWP	75
Завадський І.О., Козоріз Н.В. Оптимізація багатовимірних алгоритмів пошуку рядка в тексті	79
Іванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем	83
Івохін Є.В., Чижикова Є.В. Про деякі моделі процесів розповсюдження інформації на основі гібридного дифузійного рівняння	87
Король В.О. Аналіз проблем доповненої реальності та шляхи їх вирішення	91
Коцур Д.В. Алгоритм побудови діаграми Вороного на двовимірній сітці з $L_p$ нормою	95
Кузьмич О.І., Мекуш О.Г., Пех П.А., Багнюк Н.В. Проблема керування стійкою поставою людини при наявності проблем ЦНС	99
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Петрович В.М. Оптимізація портфеля при обмеженнях	107
Мисник Б.В., Волошин О.Ф., Снитюк В.Є. Відновлення пропусків даних в базах знань підприємств галузі як мультиагентної системи	111
Насіров Еміл М. Блочно-діагональний підхід до невід'ємної факторизації розріджених лінгвістичних матриць і тензорів надвеликої розмірності з використанням латентного розподілу Діріхле	117
Орлов Є.А. Архітектура системи пошуку відео інформації на основі вмісту	123
Панченко Т.В., Іванов Є.В., Fabunmi Sunmade, Скідоненко А.В., Трофименко Є.О. Розширений динамічний стан та модель породження екземплярів у IPCL	127
Побоченко В.Ю., Аткаєв С-А. Х. Прикладне застосування методу рівномірного розподілу для транспортної задачі оптимального розташування зарядних станцій для електромобілів	131
Таїрова М.С. Алгоритми побудови максимальної множини практичної стійкості лінійного дискретного включення	137

Шелуденко А.С. Гранична теорема для деяких статистик типу Колмогорова-Смирнова	143
Шишацька О.В. П'ятизначні логіки: побудова та інтерпретація	147
Яценко В.О. Гарантоване прогнозування Dst індексу	152

### РАДІОФІЗИКА

Голуб М.О., Литвин П.М., Мельник П.В., Федорченко М.І. Фотоемісійні властивості плівки Si-Gd-O при енергії фотонів поблизу порогу фотоефекту	157
Григорук В.І., Павлюк С.П., Телега В.М., Петричук М.В., Іванчук А.В., Малишев В.Ю. Шнування струму в прямозміщених польових мікротранзисторах	165

### СУЧАСНА ФІЗИКА

Азовський В.А., Ящук В.М. Деякі проблеми розробки люмінесцентних трансформторів для кремнієвих сонячних елементів	171
Аль-Омари М.АМ, Боровий М.О. Особливості генерації параметричного рентгенівського випромінення у порошках мікророзмірних частинок алмазу	175
Бардік В.Ю., Махлайчук В.М. Кінематична зсувна в'язкість чистих рідких металів Sn, Bi, Pb і їх бінарних розплавів.	179
Ніколаєнко Т.Ю. Квантово-хімічне дослідження нековалентної взаємодії молекул пентанової кислоти та D-глюкозаміну	183
Поперенко Л.В., Розуван С.Г., Шайкевич І.А., Розуван К.П. Оптичні властивості вуглецевих нанотрубок з дефектами кристалічної ґратки	189
Роговець А.В., Карленко Б.В, Макаренко О.В., Ямпольський А.Л. Автоматизація вимірювань: алгоритм візуального розпізнавання шкали приладу, реалізований у LabView	193
Хорольський О.В., Свечнікова О.С., Руденко О.П. Еволюція властивостей розчинів полівінілового спирту в диметилсульфоксиді	197

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ  
РІВНЯННЯ,  
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА  
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.5+577.346+612.117

Батюк Л. В.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., доцент,  
Кізілова Н. М.<sup>2</sup>, д. ф.-м. н., проф.

### Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин

<sup>1</sup> Харківський національний медичний  
університет, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 2,  
<sup>2</sup> Харківський національний університет  
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,  
пл. Свободи, 4,  
e-mail: n.kizilova@gmail.com  
liliyabatyuk24@gmail.com

L. V. Batyuk<sup>1</sup>, PhD, docent,  
N. M. Kizilova<sup>2</sup>, DSc, prof.

### Modeling of laminar flows of erythrocyte suspensions as Bingham microfluids

<sup>1</sup> V.N. Karazin Kharkov National University,  
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,  
<sup>2</sup> V.N. Karazin Kharkov National University,  
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,  
e-mail: n.kizilova@gmail.com  
liliyabatyuk24@gmail.com

Досліджуються ламінарні течії крові, суспензій еритроцитів крові або тіней еритроцитів у фізіологічному розчині по циліндричним трубкам кругового перерізу. За рахунок малого розміру еритроцитів (до 10 нм) такі рідини являють собою мікрорідини, для яких на стінках трубки виконуються умови прослизання першого роду. Наведено результати експериментальних вимірювань об'ємної витрати течії при різних зовнішніх температурах в широкому діапазоні значень і показано, що експериментальні величини суттєво відрізняються від теоретичних, обчислених за формулою Пуазейля. За рахунок наявності ефекту Фареуса-Линдквіста та прослизання на стінці об'ємна витрата рідини зростає, а за рахунок наявності ефекту Коплі-Скотт-Блера – зменшується. Крім того, з підвищенням температури поверхня клітин крові активується, підвищується її адгезивна здатність, що приводить до переходу рідини з псевдопластичного до в'язкопластичного стану. Отримано розв'язок задачі про ламінарний рух бінгамівської рідини за умовами наявності пристінних шарів Фареуса-Линдквіста та Коплі-Скотт-Блера. Чисельні розрахунки показали, що зі зростанням температури в'язкопластичні властивості домінують, за рахунок чого об'ємна витрата рідини суттєво зменшується практично до нуля, що цілком відповідає експериментальним даним.

Ключові слова: суспензія, мікрорідина, ламінарна течія, ефект Фареуса-Линдквіста, ефект Коплі-Скотт-Блера, бінгамівська рідина.

Laminar flows of blood, suspensions of red blood cells or their ghosts in the saline through cylindrical tubes of circular cross section are considered. Due to the small size of erythrocytes (up to 10 nm), such liquids are microfluids, for which the first order velocity slip boundary condition is valid at the wall of the tube. The results of experimental measurements of the volumetric flow rates at different external temperatures are presented, and the experimental values are substantially different from the theoretical ones, calculated by Poiseuille's formula. Due to the Fahraeus-Lindqvist effect and the velocity slip at the wall, the volume flow rate increases, while due to the Copley-Scott-Blair effect, it decreases. In addition, with the increase in temperature, the surfaces of the blood cells are activated and their adhesivity is increased, which result in the transition from pseudoplastic to the viscoplastic state. The solution of the problem of the axisymmetric laminar flow of the Bingham fluid in the presence of the Fahraeus-Lindqvist and Copley-Scott-Blair wall layers is obtained. Numerical computations have shown that at higher temperatures the viscoplastic properties dominate over the wall effects. Therefore, the volumetric flow rate significantly decreases to zero at high temperatures, which exactly corresponds to the experimental data.

Key Words: Suspension, Microfluid, Laminar flow, Fahraeus-Lindqvist effect, Copley-Scott Blair effect, Bingham fluid.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О

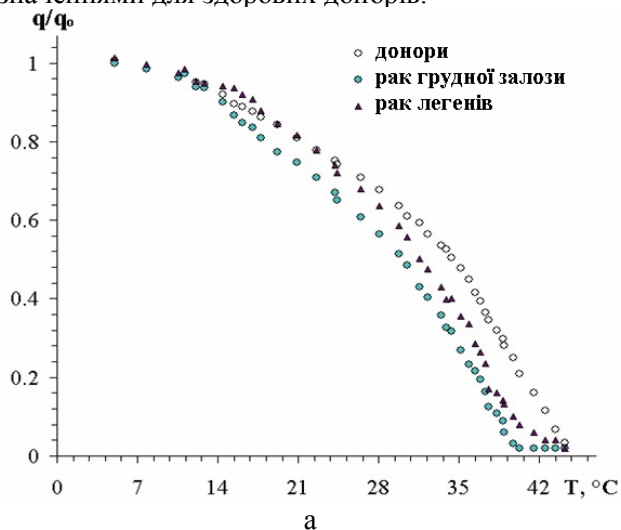
**1. Вступ.** Протягом останніх років мікрорідинні пристрої, такі як мікроелектромеханічні системи, лабораторії на чіпах, паливні елементи, мікродвигуни, мікронагрівачі/охолоджувачі та ін. все ширше використовуються в медицині для обробки крові, сепарації плазми, усунування пошкоджених або старих еритроцитів, які мають низьку гнучкість та високу щільність, та ін. [1-3]. Дія перелічених вище пристроїв основана на течіях рідини або рідин по складних системах трубок або каналів. Для обробки крові використовуються біомаркери, біохімічні або магнітні доданки, а методи сепарації ґрунтуються на різницях в механічних (щільність, еластичність та ін.), електричних (заряд, діелектрична проникність), акустичних, оптичних, магнітних та інших властивостей клітин та макромолекул.

Суспензії частинок з розмірами  $1 < d < 100$  мкм називають мікрорідинами; до їх складу відносять суспензії клітин та макромолекул. В чисельних експериментах з течіями мікрорідин по трубках було показано, що вимірювані значення об'ємної витрати рідини значно вище, ніж відповідні теоретичні, що обчислені за формулою Пуазейля. Так, було показано, що при течіях рідин по сіліконовим мікроканалам з діаметрами  $D = 5; 12; 25$  мкм коефіцієнт тертя на 5-30% вище, ніж коефіцієнт, розрахований на основі рівнянь Нав'є-Стокса [4]. Величина відхилення залежала від температури, розміру та концентрації частинок, діаметру трубки та режиму течії. Вимірювання швидкості течії води при числах Рейнольдса  $Re = 100 - 2000$  по сталевих та сіліконових мікротрубках з діаметрами  $D = 50 - 254$  мкм та відносною шорсткістю  $\varepsilon/D = 0.69 - 3.5\%$ , де  $\varepsilon$  - характерна висота шорсткості, також показало більш високі значення витрат на тертя, ніж передбачували теорією Стокса [5]. Різниця між обчисленими та вимірними значеннями зростає зі зменшенням  $D$  та зростанням  $Re$ . В прямокутних металевих мікроканалах з шириною  $W = 150 - 600$  мкм і висотою  $H = 22.7 - 26.3$  мкм спостерігалось зростання коефіцієнта тертя на  $\sim 20\%$  у порівнянні з розрахованим [6]. Зі зростанням відносної шорсткості  $\varepsilon/D$  стінки до 5% для підтримання заданої об'ємної витрати потрібен перепад тиску на 65% вище, ніж передбачений формулою Пуазейля. Як показали дослідження останніх років, головна причина розходжень пов'язана з наявністю прослизання частинок мікрорідин на стінках каналів, шорсткість яких порівняна з розмірами самих частинок. Оскільки в мікроканалах відношення поверхні до об'єму вище, ніж в макроскопічних системах, роль поверхневих ефектів, в тому числі тертя та

специфічної адгезії, суттєво зростає, що робить течії мікрорідин значно складнішими, ніж класичних макрорідин, як показано в [7].

**2. Матеріали та методи.** Проби крові донорів (25 осіб) та пацієнтів з раком легенів (32 особи), раком грудної залози (40 осіб), ішемічним (22 особи) та геморагічним (18 осіб) інсультом обробляли оксалатом натрію для стабілізації. Еритроцити вимивали у фізіологічному розчині (ФР) в центрифугі (32000 об/хв.) та готували суспензії відмитих еритроцитів у ФР зі стандартною концентрацією 35%. Зразок суспензії був розміщений в трубці, яка послідовно з'єднана з капіляром ( $d = 1.15$  мм), розміщеними у термостаті. В експерименті вимірювалася об'ємна витрата  $q$  суспензії при її течії крізь капіляр. Для порівняння розраховувалися відповідні значення об'ємної витрати  $q_0$  за формулою Пуазейля. В'язкість суспензій вимірювали за допомогою лабораторного капілярного віскозиметра Гесса. Вимірювання проводили в широкому діапазоні температур  $T = 5 - 43^\circ C$ , починаючи з  $T = 5^\circ C$ , з шагом  $\Delta T = 1^\circ C$ . Після кожного підвищення температури система приводилася до стану термодинамічної рівноваги протягом 10 хв. Результати залежностей безрозмірних витрат  $q/q_0$  від температури наведені на рис. 1 а,б.

Як показали результати, у більшості пацієнтів зі серйозними захворюваннями (рак, геморагічний інсульт) значення витрати менше, ніж у здорових, і тільки у пацієнтів з легкою формою ішемічного інсульту ці значення підвищені при низьких температурах, але при температурі тіла майже співпадають зі значеннями для здорових донорів.



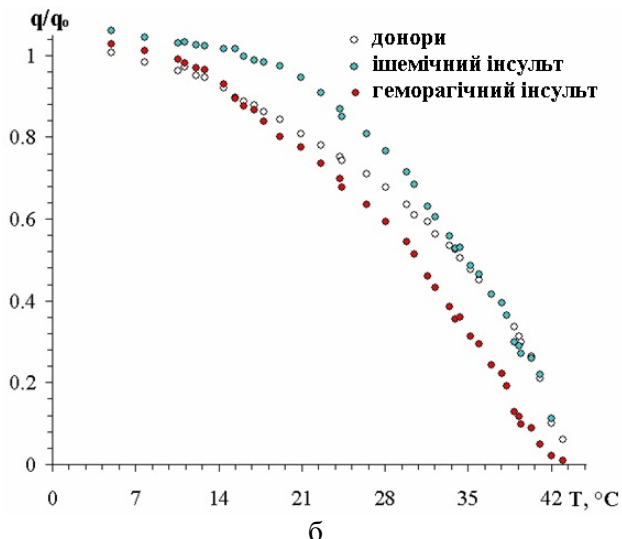


Рис.1. Залежності безрозмірної об'ємної витрати течії від температури для пацієнтів з онкологічними захворюваннями (а) та інсультом (б) у порівнянні зі здоровими донорами

Причиною таких змін може бути активація та специфічна адгезія мембран еритроцитів за рахунок зменшення товщини та порушень упорядкування їх гідратних оболонок [8]. Залежності  $q/q_0(T)$  однакові для всіх проб та пов'язані з впливом температури на мембрани [9]. Розглянутий діапазон температур далекий від мінімальних значень  $T = 52 - 53^\circ\text{C}$  (денатурація фібрину у ФР), але за рахунок температурних змін та активації мембран можливий перехід суспензії до в'язкопластичного стану [10].

### 3. Фізико-механічні аспекти течій суспензій.

**3.1. Ефект Фареуса-Ліндквіста (ФЛ).** Відомо, що при течіях суспензій мікрочастинок по вузьким трубкам та щілинам, спостерігається зростаюча залежність  $q$  від діаметру трубки  $D$ , яка пов'язана з ефектом ФЛ [11]. При цьому частинки суспензії концентруються в ядрі течії, а біля стінок утворюються тонкий шар рідини, вільної від частинок, який має нижчу в'язкість  $i$ , таким чином, грає роль мастильного шару. Аналіз сил, які діють на частинку суспензії біля стінки, показує, що відповідальною за цей ефект може бути сила Магнуса або електростатична взаємодія частинок суспензій. Оскільки еритроцити в нормі мають у ФР негативний поверхневий заряд, обидві сили можуть впливати на рух суспензії, за рахунок чого  $q/q_0 > 1$ .

**3.2. Ефект Коплі-Скотт Блера (КСБ).** Цей ефект пов'язаний за специфічною взаємодією молекул та клітин біологічних суспензій з матеріалом стінки. При цьому за рахунок

адсорбції ефективний діаметр мікротрубки зменшується, утворюється подвійний електричний шар [12], що в цілому приводить до зменшення витрати ( $q/q_0 < 1$ ) в залежності від матеріалу стінки.

**3.3. В'язкопластичні властивості суспензій.** За рахунок взаємодії частинок у концентрованих суспензіях можуть утворюватися агрегати складної форми, що веде до підвищення в'язкості (тобто  $q/q_0 < 1$ ) в залежності від температури, концентрації та форми частинок та ін. Найпростішою моделлю є реологічна модель Бінгама

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} (\tau - \tau_0) / \mu, & \tau \geq \tau_0, \\ 0, & \tau < \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\tau, \tau_0, \dot{\gamma}$  - напруження, критичні напруження та швидкості деформацій зсуву.

**3.4. Течії мікрорідин по мікроканалах.** За рахунок прослизання на стінках виконуються граничні умови прослизання першого роду для швидкості [13]

$$\left( \bar{v} - \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} \right)_{\alpha\Omega} = \bar{v}_n \quad (2)$$

де  $\bar{v}$  - швидкість,  $\partial\Omega$  - границя області,  $\bar{n}$  - нормаль до неї,  $\alpha$  - коефіцієнт прослизання. За рахунок прослизання маємо для мікрорідин  $q/q_0 > 1$ .

Таким чином, різки фізико-механічні ефекти приводять до різноспрямованих змін  $q$  у порівнянні з  $q_0$ . В даній роботі вивчається кількісний вплив кожного з ефектів на течію та витрату суспензії еритроцитів по трубці.

**4. Математична модель.** Розглянемо ламінарну стаціонарну радіально симетричну течію двох нестисливих рідин з різними в'язкостями та швидкостями по циліндричній трубці кругового перетину (Рис.2). Тут  $R$  - радіус трубки,  $h$  та  $\delta$  - товщинами шарів КСБ та ФЛ.

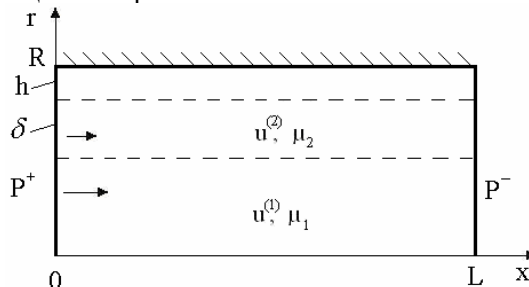


Рис.2. Схема задачі.

Тоді рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд



$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du^{(1,2)}}{dr} \right) = \frac{\delta p}{\mu_{1,2} L}, \quad (3)$$

де  $\delta p = P^+ - P^-$ , а граничні умови (2) суть

$$\begin{aligned} r=0: \quad \frac{du^{(1)}}{dr} &= 0, \\ r=R: \quad u^{(2)}(R-h) - \alpha \frac{du^{(2)}}{dr}(R-h) &= 0, \\ r=R-h-\delta: \quad u^{(1)} &= u^{(2)}, \quad \mu_1 \frac{du^{(1)}}{dr} = \mu_2 \frac{du^{(2)}}{dr}. \end{aligned} \quad (4)$$

Внутрішній шар утворений рідиною Бінгама (1), а зовнішній – ньютонівською рідиною. В рівняннях (1)-(4)  $d\mu/dT < 0$ ,  $d\delta/dT < 0$ ,  $dh/dT > 0$ ,  $d\tau_0/dT > 0$ ,  $d\alpha/dT > 0$  [2, 3, 9, 13].

## 5. Чисельні розрахунки та аналіз результатів.

**5.1. Вплив ефекту ФЛ на мікрорідини.** Окремо цей вплив можна дослідити у випадку  $\tau_0, h = 0$ .

Тоді розв'язок (1)-(2) є

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\tilde{r}) &= \mu(1-2a) + (1-\mu)(1-\Delta)^2 - \tilde{r}^2, \\ \tilde{v}_2(\tilde{r}) &= \mu(1-2a) - \mu \tilde{r}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\tilde{u}_{1,2} = u^{(1,2)} / u^*$  - безрозмірні швидкості,  
 $u^* = R^2 \delta p / (4\mu_1 L)$ ,  $\mu = \mu_1 / \mu_2$ ,  $\Delta = \delta / R$ ,  $a = \alpha / R$ ,  
 $a = C \cdot Kn$ ,  $Kn = \lambda / R$  - число Кнудсена.

З (5) легко отримаємо для витрати

$$q = \int_0^{\Delta} \tilde{u}^{(1)} \tilde{r} d\tilde{r} + \int_{\Delta}^1 \tilde{u}^{(2)} \tilde{r} d\tilde{r} = \mu(1+4a) - (\mu-1)(1-\Delta)^4, \quad (6)$$

де  $\tilde{r} = r/R$ .

Чисельні розрахунки по (6) проводилися для значень параметрів, що відповідають ФР та суспензіям еритроцитів:  $\Delta = 0.01 \div 0.4$ ,  $\mu = 1 \div 3.5$ ,  $Kn = 0.01 \pm 0.1$ ,  $C = 1 \div 1.5$  [2, 13]. Деякі результати розрахунків наведені на Рис.3.

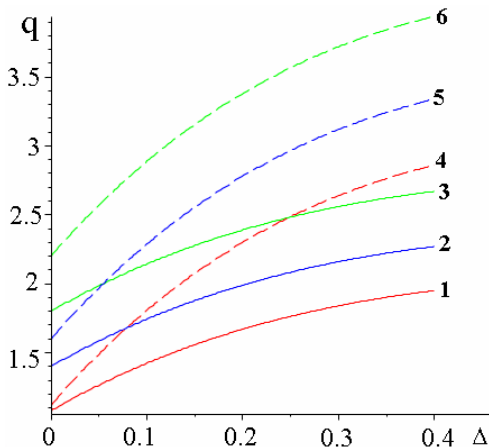


Рис.3. Залежності безрозмірної об'ємної витрати від  $\Delta$  при різних значеннях  $a$ :  $a = 0.01$  (криві 1,4),

$a = 0.05$  (криві 2,5),  $a = 0.1$  (криві 3,6). Суцільні лінії відповідають  $\mu = 2$ , пунктирні -  $\mu = 3$ .

Таким чином, витрата течії збільшується за рахунок підвищення відносної товщини змащувального шару  $\Delta$ , відносної в'язкості  $\mu$  та коефіцієнту прослизання на стінці  $a$ , що є фізичним. Із (6) отримаємо, що  $dq/dT < 0$ , якщо для  $\tilde{a}$  та  $\tilde{\Delta}$  виконується нерівність

$$\frac{4\mu\tilde{a} + (1-\tilde{\Delta})^4}{4(\mu-1)(1-\tilde{\Delta})^3\tilde{\Delta} + (1+4a)} < 1,$$

де  $\tilde{a} = |a'|/|\mu'|$ ,  $\tilde{\Delta} = |\Delta'|/|\mu'|$ .

**5.2. Одночасний вплив ефектів ФЛ та КСБ на мікрорідини.** В цьому випадку  $h \neq 0$  і тоді замість (6) маємо

$$\begin{aligned} q &= (1-h)^4 + 4(\mu\Delta - \Delta + \mu a)(1-h)^3 + \\ &+ 6\Delta^2(1-\mu)(1-h)^2 + 4\Delta^3(\mu-1)(1-h) + (1-\mu)\Delta^4, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $H = h/R$ .

Чисельні розрахунки по (7) проводилися при тих же значеннях параметрів;  $H = 0 - 0.2$ . Результати наведені на Рис. 4 а,б.

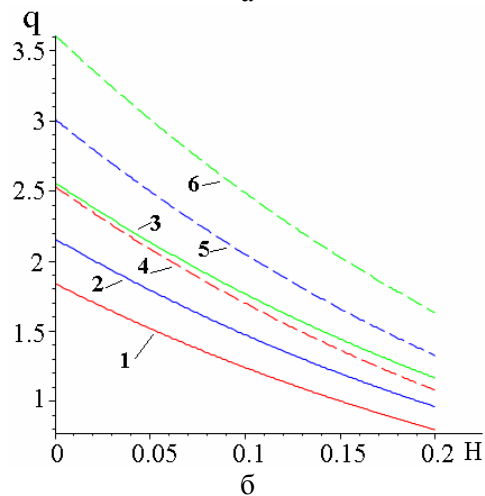
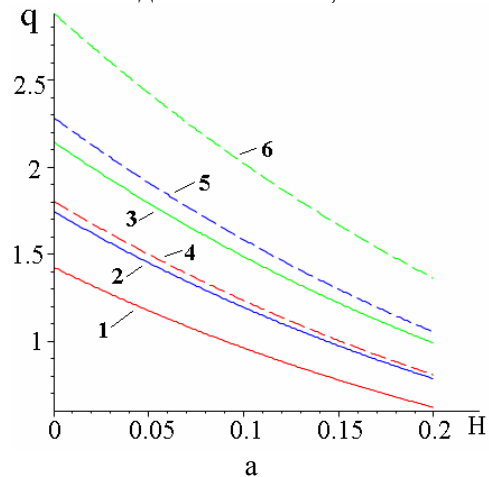


Рис. 4. Залежності  $q(H)$  при  $\Delta = 0.1$  (а) та  $\Delta = 0.4$  (б). Позначення такі ж як на рис.3.

Таким чином, зменшення ефективного радіусу трубки за рахунок утворення нерухомого шару КСБ, приводить до суттєвого зменшення витрати рідини. Зростання шару КСБ від  $h = 0$  до  $h = 0.2$  приводить до зменшення  $q$  в два рази (Рис.4), тоді як зростання шару ФЛ – в 1.5 рази (Рис.4) при тих же значеннях  $\mu, a$ . Ймовірно, що вплив ефекту КСБ значніший в нативній крові, ніж в суспензіях відмитих еритроцитів в ФР за рахунок відсутності вільних білків, ліпідів, мінералів та полісахаридів [7], тому ефект ФЛ превалює над КСБ. Відповідні термічні залежності аналогічні (7) стають більш складними за рахунок відсутності детальних даних о залежностях  $\mu(T)$ ,  $\delta(T)$ ,  $h(T)$ ,  $\alpha(T)$  в чисельному вигляді.

**5.2. Вплив ефектів ФЛ та КСБ на течії бінгамівських рідин.** Розглянемо випадок коли в ядрі течії знаходиться бінгамівська рідина, а біля стінки – ньютонівська. Тоді відповідно (1) замість (3) розглянемо рівняння у вигляді

$$\dot{\gamma}^{(1)}(\tau) = \frac{\tau_{R-\delta}}{R-h} \frac{du^{(1)}(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_0}{\mu_1}, & \tau > \tau_0 \\ 0, & \tau < \tau_0 \end{cases}, \quad (8)$$

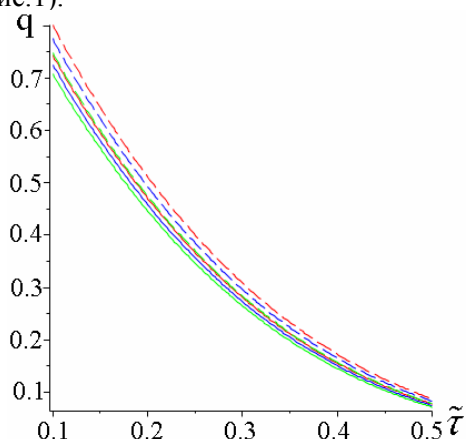
де  $\tau_{R-\delta} = \tau(R-\delta)$ . Після інтегрування (8) для  $u^{(1)}$ , (3) – для  $u^{(2)}$  та знаходження постійних інтегрування з умов (4), отримаємо

$$u(r) = \begin{cases} u_2(r), & r \in [R-h-\delta, R-h], \\ u_1(r), & r \in [R^*, R-h-\delta], \\ u_1(R^*), & r \in [0, R^*], \end{cases} \quad (9)$$

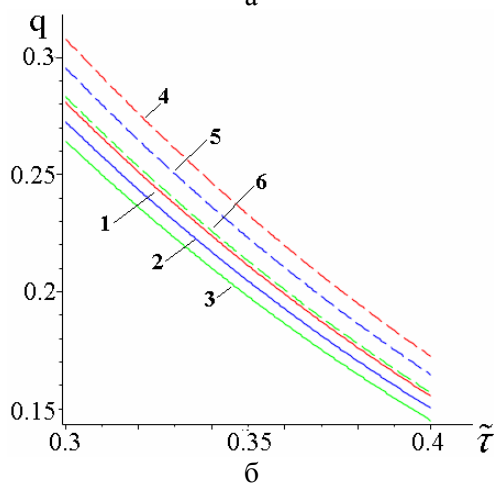
де  $R^* \in [0, R-h-\delta]$  - поверхня, вздовж якої  $\tau = \tau_0$  і яка, таким чином, розділяє зони течії та квазітвердого руху бінгамівської рідини. Детальні вирази для швидкостей та витрати крізь переріз не наведені внаслідок їх громіздкості. Результати розрахунків залежності витрати від безрозмірного критичного напруження зсуву  $\tilde{\tau} = \tau/\tau_0$  в широкому діапазоні значень  $\tau_0$  наведені на Рис.5а. Видно, що величина  $q$  залежить від  $\tilde{\tau}$  значно сильніше, ніж від  $\Delta$  та  $H$ . Збільшені залежності в більш вузькому діапазоні  $\tilde{\tau}$  наведені на Рис.5б для уяви о вигляді залежностей  $q(\tilde{\tau})$  при різних  $\mu, a$ .

Таким чином, зі зростанням температури незначно змінюються  $\mu, a, \Delta$ , що може приводити до збільшення об'ємної витрати мікрорідини, але значно зростають  $h, \tau_0$ , що приводить до суттєвого зменшення  $q$  навіть при повній зупинці руху для великих  $\tau_0$ , що відповідає даним експериментальних вимірювань на

концентрованих суспензіях еритроцитів крові в ФР (Рис.1).



а



б

Рис. 5. Залежності  $q(\tilde{\tau})$  для бінгамівської рідини для  $\Delta = 0.1, H = 0.1$  при  $\tilde{\tau} = 0.1 \div 0.5$  (а) та  $\tilde{\tau} = 0.3 \div 0.4$  (б). Позначення такі ж як на рис.3.

**6. Висновки.** Рух концентрованих суспензій мікрочастинок по мікроканалам супроводжується утворенням вільного від частинок пристінного шару та ефекту прослизання на шорстких стінках, що веде до збільшення об'ємної витрати рідини у порівнянні з однорідною ньютонівською рідиною з тією ж в'язкістю. З іншого боку, в трубках з деяких матеріалів (скло, полімери) утворюється шар КСБ та має місце підвищена агрегація частинок, що приводить до зміни характеру течії з псевдопластичного до в'язкопластичного. При низьких температурах дві групи ефектів зрівноважені, але зі зростанням температури динаміка другої групи превалює і в цілому залежність  $q(T)$  стає спадаючою, впритул до  $q=0$  при високих температурах. Такого ефекту можна уникнути за рахунок спеціальної обробки поверхні трубки (для крові це - покриття шаром фібрину) [7].

### Список використаних джерел

1. MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices, Islam N. (Ed.), InTech, 2012.
2. MEMS Materials and Processes Handbook, Ghodssi R., and Lin P. (Eds.), Springer, 2011.
3. Microfluidics and BioMEMS Applications, Tay F.E.H. (Ed.), Springer-Science, 2002.
4. Urbanek, W. An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow / W. Urbanek, J.N. Zemel, H. Bau // *J. Micromech. Microeng.* 3. - 1993. - P. 206–208.
5. Mala, G.M. Flow characteristics of water in microchannels / G.M. Mala, D.Q. Li // *Int. J. Heat Fluid Flow.* - 1999. - 20. - P.142–148.
6. Papautsky, I. Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant / I. Papautsky, B.K. Gale, S. Mohanty, T.A. Ameal, A.B. Frazier // In: *Proc. of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE).* - 1999. - 3877. - P.147–158.
7. Wang H. Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube / H. Wang, Y. Wang. // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2007. - v.28. - P.220–228.
8. Batyuk L. Influence of cancer disease on dielectric characteristics of structural-functional state of erythrocyte membranes. // *ScienceRise.* - 2015. - v.12, №7/4. - P.11-17.
9. Справочник химика (в 7 томах). / Никольский Б.П. (ред.). т.2, Л.: Химия. - 1971.
10. Kizilova N. Complex flows of cellular suspensions in microtubes at different temperatures / N. Kizilova, L. Batyuk. // *Intern Conf "Experiments in Fluid Mechanics"*, 23-24 October, 2017.
11. Oiknine C. Scott Blair model and Fahraeus-Lindqvist effect / C. Oiknine, F. Azelvandre. // *Rheol. Acta.* - 1975. - v.14. - P.51-52.
12. Oka S. Copley-Scott Blair phenomenon and electric double layer. // *Biorheology.* - 1981. - v.18, N3/6. - P. 347-353.
13. Rapp B.E. *Microfluidics: Modeling, Mechanics, and Mathematics*, Elsevier. - 2017. - 770 p.

### References

1. *MEMS Microfluidics for Lab-on-a-Chip Applications, Microelectromechanical Systems and Devices*, ISLAM, N. (Ed.), InTech, (2012).
2. *MEMS Materials and Processes Handbook*, GHODSSI, R., & LIN, P. (Eds.), Springer, (2011).
3. *Microfluidics and BioMEMS Applications*, TAY, F.E.H. (Ed.), Springer-Science, (2002).
4. URBANEK, W., ZEMEL, J.N., & BAU, H. (1993) An investigation of the temperature dependence of Poiseuille numbers in microchannel flow. *J. Micromech. Microeng.* 3. p. 206–208.
5. MALA, G.M. & LI D.Q. (1999) Flow characteristics of water in microchannels. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 20. p.142–148.
6. PAPAUTSKY, I., GALE, S., et al. (1999) Effects of rectangular microchannel aspect ratio on laminar friction constant. *Proc. of the Society of Photooptical Instrumentation Engineers (SPIE).* 3877. p.147–158.
7. WANG, H. & WANG, Y. (2007) Influence of three-dimensional wall roughness on the laminar flow in microtube. *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 28. p.220–228.
8. BATYUK, L. (2015) Influence of cancer disease on dielectric characteristics of structural-functional state of erythrocyte membranes. *ScienceRise.* 12. p.11-17.
9. *Spravochnik Chimika (in 7 vol)*, NICKOLSKI, B.P. (ed.). v.2. (1971).
10. KIZILOVA, N. & BATUYK, L. (2017). Complex flows of cellular suspensions in microtubes at different temperatures. *Intern Conf "Experiments in Fluid Mechanics"*. (2017).
11. OIKNINE, C. & AZELVANDRE, F. (1975) Scott Blair model and Fahraeus-Lindqvist. *Rheol. Acta.* 14. p.51-52.
12. OKA, S. (1981) Copley-Scott Blair phenomenon and electric double layer. *Biorheology.* 18. p. 347-353.
13. RAPP B.E. (2017) *Microfluidics: Modeling, Mechanics, and Mathematics*, Elsevier.

Надійшла до редколегії 30.10.17